Exercice #1
Elasto-plasticité

1 Contraintes normale et tangentielle

En 2D (repère cartesien $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$), on considère le champ de contraintes suivant

$$\sigma_{xx} = 4\text{MPa} \qquad \sigma_{yy} = 6 \text{ MPa} \qquad \sigma_{xy} = 2 \text{ MPa}$$

Calculez la contrainte normale et tangentielle i) au plan orienté à $\alpha = 30°$ de l'axe $\mathbf{e}_x$ (dans le sens trigonométrique), ii) au plan orienté à $\alpha = 30°$ de l'axe $\mathbf{e}_y$ (dans le sens trigonométrique).

2 Essai triaxial sur un sol de Mohr-Coulomb

On se propose de calculer la réponse théorique à un essai tri-axial **drainé** (pression de pore constante et égale à la pression atmosphérique) pour un sol modélisé par un comportement élasto-plastique avec un critère de Mohr-Coulomb (pour un écoulement plastique associé puis non-associé). On prendra les paramètres suivants pour les matériaux:

$$E = 2200\text{kPa},\ \nu = 0.25,\ c' = 5\text{kPa},\ \phi = 25°$$

On rappelle que l'essai est effectué sur un échantillon cylindrique. Le repère cylindrique est un repère de contraintes principales et le champ de contraintes est uniforme dans l'échantillon. La symétrie implique

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$$

et on notera $\sigma_{rr} = \sigma_c$ la contrainte de confinement et la charge axiale $\sigma_{zz} = \sigma_a$.

2.1 Phase de confinement isotrope

La première phase du test consiste en une compression isotrope. On augmente par conséquent σ_{rr} et σ_{zz} en parallèle

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_c$$

Dérivez la déformation axiale ε_{zz} ainsi que la déformation volumique correspondante. Faites l'application numérique pour $\sigma_c = 50\text{kPa}$.

2.2 Phase de chargement axial

Ensuite tout en gardant $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_c$, on augmente σ_{zz} jusqu'à plastification du sol. En pratique, on impose la vitesse de déformation axiale $\dot{\varepsilon}_{zz}$ et on mesure la charge correspondante. On fait tout d'abord l'hypothèse d'un écoulement plastique associé, i.e.

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \lambda \geq 0$$

1. Obtenez l'expression analytique de la charge $\sigma_{zz} = \sigma_a$ correspondant à la rupture. Calculez la déformation correspondante (i.e. juste au début de la rupture). Faites l'application numérique.
2. Exprimez analytiquement les taux de déformations plastiques axiales et volumique.
3. Quelle est la déformation volumique totale pour une déformation axiale totale de 0.1 ?

2.3 Ecoulement plastique non-associé

Refaites les développements et calculs de 2.2 pour le cas d'un écoulement plastique non-associé. On prendra l'angle de dilatance suivant $\psi = \phi/5$.